Matemáticas I **5–Febrero–09**

1. (a) Designando por $\binom{n}{k}$ a la cantidad de subconjuntos de k elementos que posee un conjunto de n elementos, demuestra, por inducción sobre $n \geq 1$, que si $a, b \in \mathbf{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{(5 puntos)}$$

Indicación: El número[1] $\binom{n}{k}$ se puede obtener de acuerdo al triángulo de Tartaglia:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \forall n \geq 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \forall n \geq 2, \forall k = 1, \ldots, n-1$

Solución:

- Si $n = 1$, el primer miembro de la fórmula es $a + b$ y el segundo es

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b$$

por lo que la fórmula es correcta.

- Supongamos, $n > 1$ y que

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{(n-1)-k} b^k$$

Entonces,

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{(n-1)-k} b^k \right)$$

Operando el segundo miembro,

$$\left(a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{(n-1)-k} b^k \right) + \left(b \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{(n-1)-k} b^k \right)$$

Es decir,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{(n-1)-k} b^{k+1}$$

Agrupando convenientemente,

$$\binom{n-1}{0} a^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} a^{(n-1)-k} b^{k+1} \right) + \binom{n-1}{n-1} b^n$$

[1] combinatorio

Observemos ahora que[2]

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}a^{(n-1)-k}b^{k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}a^{(n-1)-(k-1)}b^{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^{k}$$

Por lo que nuestro segundo miembro se convierte en

$$\binom{n-1}{0}a^n+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}a^{n-k}b^k\right)+\binom{n-1}{n-1}b^n$$

Agrupando,

$$\binom{n-1}{0}a^n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right)a^{n-k}b^k+\binom{n-1}{n-1}b^n$$

que, teniendo en cuenta las reglas[3] del triángulo de Tartaglia, se convierte finalmente en

$$\binom{n}{0}a^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

(b) En el conjunto $\mathcal{P}(\{a,\ldots,z\})$, formado por los subconjuntos de letras del alfabeto, ordenado por inclusión se considera el subconjunto

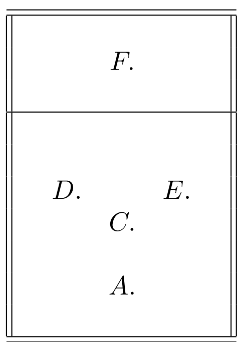
$$\mathcal{B}=\{A,C,D,E\}$$

donde

$$A=\{x\}\quad C=\{x,y,z\}\quad D=\{x,y,z,v\}\quad E=\{x,y,z,u\}$$

Describe, si existen, supremo, máximo, maximales, mínimo, minimales, ínfimo, cotas superior e inferior (una cota a lo sumo) (5 puntos).

Solución: Designando por F a $\{x,y,z,u,v\}$, nos ayudamos del siguiente esquema



[2]lo que se suele llamar un cambio de variable

[3]demostrables

El supremo es $F = C \cup D \cup E$, pues contiene a los cuatro *elementos* de $\mathcal{B}$ y cualquier *elemento* de éste que contenga a los cuatro contiene a F. No es máximo por no pertenecer a $\mathcal{B}$.

D y E son maximales de $\mathcal{B}$, pues ningún *elemento* de $\mathcal{B}$ los contiene.

Por otro lado, A es mínimo y, por ende, minimal ínfimo y cota inferior, pues está contenido en todos los de $\mathcal{B}$.

Una cota superior es $\{x, y, z, u, v\}$, pues contiene a los cuatro *elementos* de $\mathcal{B}$. Asimismo el total $\{a, \dots, z\}$ y el $\emptyset$ son, respectivamente, otra cota superior e inferior. Puede elegir el examinando una de ellas.

2. (a) Describe en el lenguaje que estimes oportuno un procedimiento para resolver un sistema de congruencias polinómicas (caso de dos o más) (5 puntos).

   Solución: Puede tomarse como modelo el procedimiento de la página 63 del libro de texto.

   (b) Una profesora de primaria desea comprar bolsas de "pipas" para repartir entre sus alumnos. Sabe que si van 21 a clase le sobran dos bolsas, que si van 22 le sobra 1 bolsa y que si van 23 no le sobra ninguna bolsa.

   Sabiendo que la bolsa cuesta 2 céntimos de euro y que dispone de un generoso presupuesto de 240 euros, ¿cuántas bolsas puede comprar? (5 puntos)

   Solución: Se trata de resolver el sistema de congruencias

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & \equiv & 2 & \bmod & 21 \\ x & \equiv & 1 & \bmod & 22 \\ x & \equiv & 0 & \bmod & 23 \end{array}\right. \qquad \text{(5 puntos)}$$

   Tomando las dos primeras congruencias

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & \equiv & 2 & \bmod & 21 \\ x & \equiv & 1 & \bmod & 22 \end{array}\right.$$

   buscamos $x = 2 + 21y$ cumpliendo la segunda, es decir

$$2 + 21y \equiv 1 \mod 22$$

   Operando,

$$21y \equiv -1 \mod 22$$

   Puesto que $21 \equiv -1 \mod 22$, se tiene

$$21y \equiv 21 \mod 22$$

   luego multiplicando por el inverso de 21 módulo 22, podemos[4] tomar $y = 1$, lo que da $x = 23$.

   Pasamos a resolver, el nuevo sistema[5]

[4] aunque no sepamos cuál sea el citado inverso modular; lo que sí sabemos es que existe por ser 21 y 22 primos entre sí

[5] 21.22=42.11=464

$$\begin{cases} x \equiv 0 \mod 23 \\ x \equiv 23 \mod 464 \end{cases}$$

De la misma manera,

$$x = 0 + 23z \Longrightarrow 23z \equiv 23 \mod 464 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow x = 23$$

Y la solución general es

$$23 + 464.23k, k \in \mathbf{Z} = 23 + 10672k, k \in \mathbf{Z}$$

Es decir, 23, 10695, 21367,...; debido a su presupuesto de 240 euros, 10695 son las bolsas que puede comprar.

3. El balance de cierta empresa presenta las siguientes variaciones en tres años consecutivos: año 1, 2 puntos; año 2, -1 punto y año 3, 1 punto. El gerente desea prever el posible balance de la empresa en el año 10 y llama al responsable del equipo informático para que le haga una predicción.

   Este le pide tiempo para hacer sus cuentas.

   - ¿Qué polinomio calcula el responsable de informática? (8 puntos)
   - ¿Cuál será la respuesta al gerente? (2 puntos).

   Solución:

   - El informático desea calcular el polinomio f interpolador de grado menor o igual que 2, que pasa por los puntos
     (Año 1,2),(Año 2,-1),(Año 3,1)
     que formula como

     $$f(1) = 2, f(2) = -1, f(3) = 1$$

     Al efecto, resuelve el sistema de congruencias

     $$\begin{cases} f \equiv 2 \mod x-1 \\ f \equiv -1 \mod x-2 \\ f \equiv 1 \mod x-3 \end{cases}$$

     Siguiendo nuestro procedimiento[6] los cálculos serán

k	a_k	b_k	G	u	h	f
0	1	2	1			2
1	2	-1	$x-1$	1	-3	$-3x+5$
2	3	1	x^2-3x+2	1/2	5/2	$5/2\,x^2-21/2\,x+10$

     obteniendo el polinomio $f = 5/2\,x^2 - 21/2\,x + 10$.

[6] el lector puede seguir el que estime oportuno, a sabiendas de que el resultado es único

- Ahora el balance previsto para el año 10 es

$$f(10) = (5/2) \,.\, 100 - (21/2) \,.\, 10 + 10 = 155$$

Por tanto, la empresa en 10 años presenta un balance positivo de 155 puntos[7].

4. En el espacio vectorial $V = \mathbf{R}^3$, dados tres números reales a, b, c, se considera el endomorfismo $h\colon V \longrightarrow V$ de matriz coordenada[8]

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ c & a & c+1 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Estudiar para qué valores de a, b, c es diagonalizable (6 puntos).

(b) En los casos posibles, base de V tal que la matriz coordenada de h es diagonal (4 puntos).

Solución:

(a) El endomorfismo es diagonalizable si y sólo si A lo es, por lo que esta parte del ejercicio ha sido objeto de una de las prácticas de laboratorio. Para el examinando que no la hiciera se desarrollan las siguientes líneas:
La matriz característica es:

$$\begin{pmatrix} x-2\,a+b & 0 & -2\,a+2\,b \\ -c & x-a & -c-1 \\ a-b & 0 & x+a-2\,b \end{pmatrix}$$

Su determinante se calcula fácilmente por la segunda columna

$$(x-a)\begin{vmatrix} x-2\,a+b & -2\,a+2\,b \\ a-b & x+a-2\,b \end{vmatrix}$$

$$||$$

$$x\ ((x-2\,a+b)(x+a-2\,b) - (-2\,a+2\,b)(a-b)) = \cdots = (x-a)^2(x-b)$$

En consecuencia los valores propios son a y b.
Casos posibles

- $\underline{a = b}$: Entonces a es triple. Si el endomorfismo fuera diagonalizable, la matriz sería semejante a aI_3, luego sería exactamente I_3. Pero no hay ningún valor de c que permita esa afirmación.

[7] ¡Vaya gestión!
[8] en bases canónicas

- $\underline{a \neq b}$: Entonces, a es doble y b es simple.
  Para calcular la multiplicidad geométrica de a debemos estudiar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} -a+b & 0 & -2\,a+2\,b \\ -c & 0 & -c-1 \\ a-b & 0 & 2\,a-2\,b \end{pmatrix}$$

  Escalonando,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -c & 0 & -c-1 \\ a-b & 0 & 2\,a-2\,b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & c-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  que es 2 si $c \neq 1$ y 1 si $c = 1$. Por tanto, el endomorfismo es diagonalizable si y sólo si $a \neq b$ y $c = 1$.

(b) Pasemos a estudiar el caso de diagonalización $\underline{a \neq b, c = 1}$:

$V(a)$: Se trata de calcular el núcleo de

$$\begin{pmatrix} -a+b & 0 & -2\,a+2\,b \\ -1 & 0 & -2 \\ a-b & 0 & 2\,a-2\,b \end{pmatrix}$$

Puesto que se trata de resolver un sistema homogéneo, y $a \neq b$, es el mismo que el de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -a+b & 0 & -2\,a+2\,b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el mismo que el de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que claramente es

$$\mathbf{R} < (2,0,-1),(0,1,0) >$$

$V(b)$: Se trata de calcular el núcleo de

$$\begin{pmatrix} -2\,a+2\,b & 0 & -2\,a+2\,b \\ -1 & -a+b & -2 \\ a-b & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Puesto que se trata de resolver un sistema homogéneo, y $a \neq b$, es el mismo que el de

$$\begin{pmatrix} -1 & -a+b & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el mismo que el de

$$\begin{pmatrix} -1 & -a+b & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el procedimiento NUCLEO, trasponemos y aumentamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a+b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Escalonando,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & 1 & -a+b \end{array}\right)$$

Por tanto, el núcleo buscado es

$$\mathbf{R} < (a-b, 1, b-a) >$$

Y la base pedida es

$$((2,0,-1),(0,1,0),(a-b,1,b-a))$$

5. En el plano euclídeo $\mathbf{R}^2$ se consideran las simetrías[9] axiales σ_1 y σ_2 de bases las rectas

$$y = 1 \qquad y = x$$

se pide

(a) Ecuación de σ_1 (1 puntos)

(b) Ecuación de σ_2 (2.5 puntos)

(c) Ecuación de $g = \sigma_2 \circ \sigma_1$ (1 punto)

(d) Probar que g es un movimiento (1 punto)

(e) Elementos notables de g (2 puntos)

(f) Ecuación implícita de la recta imagen, por g, de

$$x = -y \qquad \text{(2.5 puntos)}$$

Solución:

[9] ortogonales

(a) **Ecuación de σ_1:**
La imagen del origen es $(0,2)$ y la matriz A se calcula cómodamente a partir de

$$\sigma_1(1,0) = (1,2) \quad \sigma_1(0,1) = (0,1)$$

Entonces,

$$A^1 = (1,2)^t - (0,2)^t = (1,0)^t \quad A^2 = (0,1)^t - (0,2)^t = (0,-1)^t$$

y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la ecuación es $Y = (0,2)^t + AX$.

(b) **Ecuación de σ_2:**
El origen queda fijo, por pertenecer a la base. La ecuación es $Y = BX$, donde B se calula, por ejemplo, mediante las imágenes de los puntos fundamentales, siendo éstas prácticamente obvias:

$$\sigma_2(1,0) = (0,1) \quad \sigma_2(0,1) = (1,0)$$

Por tanto, la ecuación es $Y = BX$ donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) **Ecuación de $g = \sigma_2 \circ \sigma_1$:**
La transformación es

$$X \hookrightarrow a + AX \hookrightarrow B(a + AX) = Ba + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Es decir, la ecuación es

$$Y = (2,0)^t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

(d) Denominando C a la matriz de la ecuación, $C^tC = I$ y es un movimiento.

(e) Para ver los elementos notables del movimiento calculamos los rangos; poniendo $c = (0,2)^t$:

$$\mathrm{rang}(I - C) = 2 = \mathrm{rang}(I - C|c)$$

En estas condiciones, se trata de un giro. Para calcular el centro, planteamos

$$(I - C)X = c \Longrightarrow x = 1 \quad y = 1$$

exactamente, el punto de corte de los dos ejes[10].

[10] Como debe ser

Finalmente, el ángulo de giro se obtiene de

$$\cos\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \pi/2$$

pues el seno es positivo; exactamente, el doble del ángulo que forman los dos ejes[11].

(f) La imagen de una recta por un movimiento es una recta así que tomamos dos puntos $P(0,0)$, $Q(1,-1)$ en la recta dada y calculamos sus imágenes

$$g(P) = (2,0)^t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (0,0)^t = (2,0)^t$$

$$g(Q) = (2,0)^t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (1,-1)^t = (3,1)$$

Por tanto, la ecuación de la recta imagen se deduce de

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x-2 & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Es decir,

$$x - y = 2$$

[11] No faltaría más. Asimismo es válida la contestación: *simetría central de base el punto* $(1,1)$